Rocznik Kognitywistyczny 6/2013, s. 1–10
doi:10.4467/20843895RK.13.001.1348

KRZYSZTOF CIPORA

Czym jest liczba?

Keywords: numerical cognition, philosophy of mathematics, numbers, number representations

What is a number?

Abstract: The concept of number is an abstract concept. Numbers do not exist itself in the nature. On the other hand, they carry a wide variety of significant information about the environment and are present in the life of human being in almost all fields. The origins of numbers as well as its nature were considered in numerous ways by mathematicians, philosophers, psychologists etc. The classical theories of number are briefly discussed and opposed to the psychological and neuroscientific findings regarding number representations. It seems that the ability to use information carried by number is not exclusive to educated human mind, contrary its origins are innate and common to humans and several other species.

Uwagi wstępne

Jak wskazuje między innymi Brian Butterworth [1999], liczby towarzyszą człowiekowi niemal bezustannie. Bardzo duży jest również zakres informacji, jakie są poprzez nie przekazywane (np. ceny, liczebność, kolejność, oznaczenia konkretnych obiektów, data, czas itp.). Przekonanie o kluczowym znaczeniu liczby w opisie funkcjonowania świata można znaleźć już w poglądach pitagorejczyków. Filozofowie z tej szkoły byli zdania, że liczba jest podstawowym budulcem wszechświata [por. Lloyd 2009]. Na różnorodność aspektów liczby wskazuje Ludwig Wittgenstein, zdaniem którego liczby nie można określić poprzez wskazanie cech definicyjnych [Cullen 2009], ale można ją scharakteryzować poprzez podobieństwo rodzinne. Innymi słowy, przy charakteryzowaniu liczby nie jest możliwe podanie zestawu cech definicyjnych, które w równym stopniu charakteryzowałyby wszystkich przedstawicieli tej kategorii, możliwe jest natomiast wskazanie podobieństw i związków wewnątrz tej kategorii. Wittgenstein posługuje się tu przykładem rodzinnej fotografii, na której można dostrzec podobieństwa między członkami rodziny, choć nie jest możliwe wskazanie cechy czy zestawu cech charakteryzujących wszystkie osoby.

Odpowiedzi na pytanie o naturę i sposób istnienia liczby próbowano szukać w różnych dziedzinach nauki. W filozofii używanie liczb uznawano tradycyjnie za domenę wyłącznie człowieka wykształconego, a rozważania koncentrowały się na tym, jakim rodzajem bytu są liczby i jakie ich rodzaje można wyróżnić. Odmienne ujęcie liczby można odnaleźć na gruncie psychologii poznawczej i neurobiologii. Podstawowe zdolności liczenia i operowania liczebnościami są wrodzone i wspólne wielu gatunkom zwierząt. Bardziej złożone zdolności matematyczne są natomiast nadbudowane na tych pierwotnych predyspozycjach [Dehaene 2001]. Co więcej, na podstawie wyników badań w zakresie psychologii poznawczej i neurobiologii można stwierdzić, że reprezentacja wielkości, wartości liczbowej i nasilenia określonej właściwości stanowi charakterystykę oderwaną od obiektu. W dalszej części artykułu zostaną przedstawione poglądy na temat istnienia liczby z perspektywy filozoficznej i psychologicznej, również z uwzględnieniem odkryć w zakresie neurobiologii.

Liczba z perspektywy filozofii

Natura liczby to jedno z podstawowych zagadnień filozofii matematyki, ale problem ten jest często poruszany również w rozważaniach bardziej ogólnych. Już w początkach filozofii myśliciele zadawali pytanie, czy liczby są obiektami istniejącymi niezależnie od podmiotu, konstruktami mentalnymi, czy tylko tajemniczymi bytami, których natury nie znamy [por. Priest 1998]. Jako przykład można przytoczyć radykalne poglądy w tym zakresie wyznawane przez pitagorejczyków. Według nich „wszystkie rzeczy" składają się z liczb lub naśladują liczby. W poglądach filozofów z tej szkoły brakuje jasnego doprecyzowania, czy chodzi o to, że liczby są budulcem wszechświata, czy może, skoro „wszystkie rzeczy" naśladują liczby, oznacza to, iż za pomocą liczb można opisać prawa rządzące wszechświatem [por. Lloyd 2009]. Dokładny przegląd poglądów na temat natury liczby przedstawia Jacek Widomski [1996].

Stanislas Dehaene [2011] uważa, że najsilniejszy wpływ na rozwój matematyki wywarły poglądy Platona. Zgodnie z tą koncepcją twierdzenia matematyczne mają charakter aprioryczny, są prawdami obiektywnymi i istnieją niezależnie od poznającego umysłu. Matematyk próbuje odnaleźć już istniejące prawa, w żadnym wypadku tych praw nie tworzy. Również według świętego Augustyna byty matematyczne istnieją niezależnie od podmiotu. Platon wyróżnił trzy rodzaje liczb: idealne, matematyczne i zmysłowe. Wydaje się, że najbardziej zbliżone do naszego rozumienia liczby są platońskie liczby matematyczne, będące wielokrotnościami jedynek. Podobne poglądy wyznawał również Plotyn i przedstawiciele neoplatonizmu.

W filozofii Arystotelesa pojawia się pogląd, że liczba jest uzależniona od podmiotu poznającego. Powstaje w wyniku abstrahowania, uogólniania i idealizacji. Według Arystotelesa matematyka nie bada więc obiektów świata fizycznego, lecz ich matematyczne właściwości [Lloyd 2009]. Filozof ten wiązał liczbę z ilością (ciągłą lub dyskretną). W tej taksonomii liczba jest wielkością dyskretną i uporządkowaną. Na koncepcję Arystotelesa wpływ wywarła Euklidesowa interpretacja liczby jako odcinka, którego długość można wyrazić w postaci wielokrotności długości odcinka stanowiącego przyjętą jednostkę. Liczby zatem definiowane są przez wielości składające się z całkowitej liczby monad. Jak zostanie pokazane w dalszej części niniejszego artykułu, mózgowe reprezentacje liczb mają podobną naturę jak reprezentacje ilości ciągłych bądź fizycznych charakterystyk obiektu. Arystoteles kontrastował różnice w zakresie liczby z różnicą gatunkową czy jakościową [por. Anscombe i Geach 1973]. Wyznający podobne poglądy w tej kwestii święty Tomasz z Akwinu podał arystotelesowską definicję liczby, wskazując jako gatunek nadrzędny mnogość czy wielość, a jako specyficzną różnicę – mierzalność przez jeden [Widomski 1996]. Co warte podkreślenia w kontekście niniejszej pracy, traktował liczbę i ilość jako elementy należące do tej samej kategorii. Rozróżnienia ilości ciągłych i dyskretnych dokonał również Jan Duns Szkot. Jego zdaniem naturalna i istniejąca jako byt niezależny od umysłu jest ilość ciągła, ilość dyskretna natomiast zależy już od poznającego podmiotu [Widomski 1996].

Pogląd, że liczba jest kreacją umysłu, krytykował George Berkeley. Ilustrował to przykładem, że dowódca nie może zwiększyć liczebności swojego pułku poprzez myślenie o niej. Według tego myśliciela nabywanie zdolności liczbowych jest czymś więcej niż abstrahowanie, zwłaszcza w przypadku bardziej złożonych operacji. Na podstawie konkretu nie można dowiedzieć się na przykład, ile jest 2^3 [Anscombe i Geach 1973].

Ciekawym nurtem filozofii matematyki, który należy wspomnieć w tym miejscu, jest psychologizm. Liczby są tu rozumiane jako konstrukty mentalne, a nie fizyczne. W związku z tym istnienie liczby sprowadza się do zaistnienia określonych wzorców aktywności neuronalnej. Niemniej, jak twierdzi Michele Friend [2007], ten rodzaj redukcji może być użyteczny dla psychologa i nauczyciela matematyki. W żaden jednak sposób nie będzie on przydatny dla matematyka, którego nie interesuje aktywność mózgu. Obiektem zainteresowań tego ostatniego jest sama dziedzina, a nie myślenie o niej.

Na podstawie przedstawionego wyżej, bardzo skrótowego przeglądu filozoficznych koncepcji liczby widać wyraźnie, że poglądy na jej naturę są niezwykle zróżnicowane. Według Dehaene'a [2011] platoński realizm jest wyznawany świadomie lub *implicite* przez większość matematyków. Na ważność tej koncepcji wskazuje również Friend [2007], która twierdzi, że inne znaczące filozoficzne podejścia do matematyki są rozwinięciem platonizmu lub stają w wyraźnej opozycji do niego. Modyfikacjami teorii Platona są logicyzm i niektóre formy strukturalizmu. Konstruktywizm z kolei to bezpośrednia opozycja dla poglądów Platona. Postulat podejścia zwanego logicyzmem głosił, że matematykę można zredukować do logiki, gdzie dany jest zestaw aksjomatów, z których wyprowadzane są wnioski na podstawie pewnego zestawu definicji [por. Dehaene 2011]. Innym rozwijającym się w ostatnich latach nurtem w filozofii matematyki jest strukturalizm. Prąd ten obecny jest szczególnie w filozofii nauk humanistycznych, niemniej zyskuje na popularności również w filozofii matematyki. Strukturalizm zarzuca badanie wyizolowanych obiektów, które ujmowane są jako części składowe większych struktur. Co więcej, części te są pozbawione indywidualnych własności. Do obiektów matematycznych odwołujemy się zawsze w kontekście większej struktury, do której one przynależą, a ich własności można opisać w terminach relacji zachodzących w ramach danej struktury [Bondecka-Krzykowska 2003]. I tak na przykład liczbę naturalną należy rozważać w kontekście jej relacji z innymi liczbami naturalnymi. Szczegółowe omówienie strukturalizmu w matematyce prezentuje Izabela Bondecka-Krzykowska [2003]. Zgodnie z poglądem konstruktywistycznym, prawa matematyki nie istnieją w sposób obiektywny, lecz stanowią konstrukcje umysłowe [Friend 2007]. Wyczerpujący opis poszczególnych stanowisk w filozofii matematyki prezentuje Leon Horsten [2012].

Ladislav Kvasz [1998, 2000, 2006] ukazuje rozwój matematyki (ujmowanej całościowo) oraz algebry i geometrii (traktowanych osobno) jako rozwój języka, jakim są opisywane. Podstawową trajektorią tego rozwoju jest przejście od operowania na konkrecie do operacji na materiale coraz bardziej abstrakcyjnym.

Starożytni Grecy algebrę i liczby pojmowali w sposób geometryczny. Tak też rozwikływali problemy obecnie rozwiązywane algebraicznie, np. dla $x^2 + xy = z$ poszukiwaliby odcinków o długości x i y, aby suma pola kwadratu o boku x i prostokąta o bokach x i y była równa polu z. Z operacji na konkrecie wyprowadzali prawa ogólne. Z drugiej strony, jak wskazuje Graham Priest [1998], greckie zainteresowanie matematyką odrywało ją od konkretnych korzeni i zmierzało w stronę teorii. Starożytnych najbardziej interesowało przeprowadzanie dowodów twierdzeń, a były to najczęściej dowody geometryczne. Jak podaje Kvasz [2000], dla Gottloba Fregego rozwój matematyki to przejście od operacji na konkrecie do operacji na symbolach abstrakcyjnych. W historii matematyki najpierw pojawił się zapis konkretny, a następnie uzupełniony przez zapis w postaci liter i symboli. Następnie zaczęto wykorzystywać funkcje, by potem opisać ogólne zasady, którymi te funkcje się rządzą. Warto zwrócić uwagę, że w czasie nabywania wiedzy matematycznej najpierw rozwijają się operacje na konkretnych obiektach, a z czasem na ich podstawie kształtuje się zdolność operowania na materiale symbolicznym.

Liczba z perspektywy psychologii

Reprezentacja liczby

Obiekty, z którymi człowiek ma kontakt, są reprezentowane w umyśle. Problematyka natury mentalnych reprezentacji świata zewnętrznego stanowi jeden z podstawowych obszarów badań psychologii poznawczej [Nęcka, Orzechowski i Szymura 2006]. W związku z tym psychologiczny aspekt liczby może obejmować jej mentalną reprezentację. Była ona obiektem licznych badań, w których próbowano odpowiedzieć na pytanie o jej charakter oraz podobieństwo do innych rodzajów reprezentacji.

Z perspektywy matematyki odpowiedź na pytanie o naturę reprezentacji liczby zdaje się niemal oczywista. Optymalnym sposobem reprezentowania liczby jest forma opisowa. Liczba powinna być reprezentowana w formie zbliżonej do werbalnej etykiety, a relacje między poszczególnymi liczbami – jako zero-jedynkowe sądy (np. a jest równe b; x jest większe od y, z jest większe od y, nie ma znaczenia, jak duża jest różnica między x a y czy z a y). Dwie liczby są równe lub jedna z nich jest mniejsza, druga większa, nie ma miejsca na stany pośrednie. Ten teoretyczny postulat nie znajduje jednak odzwierciedlenia w wynikach badań. Przeciwnie, wydaje się, że reprezentacje wielkości liczb mają charakter analogowy, a relacje mniejszości/większości nie są zero-jedynkowe. Robert S. Moyer i Thomas K. Landauer [1967] wykazali, że czas porównania liczb, których różnica jest niewielka, jest dłuższy niż czas porównywania liczb różniących się znacznie [por. Dehaene 2011]. Innymi słowy, „psychologicznie” 1 bardziej różni się od 5 niż od 2. Dystans numeryczny jest analogiczny do opisanego kilkadziesiąt lat wcześniej przez psychologów postaci (*Gestalt*) efektu dystansu [por. Cohen Kadosh, Lammertyn i Izard 2008]. Czas porównywania fizycznych obiektów różniących się pod względem określonej charakterystyki (na przykład długości odcinków czy rozmiaru figur geometrycznych) jest zależny od różnicy między porównywanymi obiektami. Im różnica mniejsza, tym więcej czasu potrzeba na dokonanie porównania [Johnson 1939; por. Pinel, Piazza, Le Bihan i Dehaene 2004]. Odkrycie efektu dystansu numerycznego wskazywało, że reprezentacje rozmiaru i liczebności mają bardzo podobną naturę.

Analogiczne wnioski można wysnuć na podstawie efektu rozmiaru. Polega on na tym, że czas porównywania dwóch obiektów jest zależny od ich bezwzględnej wielkości. Łatwiej jest porównać z sobą dwa małe obiekty niż dwa duże, mimo że bezwzględna różnica między nimi jest taka sama [Dehaene 2011]. Występuje w przypadku zarówno obiektów fizycznych (na przykład wielkość powierzchni, rozwartość kąta), jak i liczb [Fias, Lammertyn, Reynvoet, Dupont i Orban 2003]. Innymi słowy, psychologiczna różnica między 30 a 31 jest mniejsza niż między 1 a 2.

Istnienie obydwu tych zjawisk stanowi dowód na analogowy charakter reprezentacji liczb. Ten rodzaj reprezentacji wydaje się stać w sprzeczności z matematycznym rozumieniem liczby, w którym relacje mniejszości/większości mają charakter kategorialny i niestopniowalny. Co więcej, podobne charakterystyki efektów dystansu i rozmiaru obserwowanych dla różnego rodzaju wielkości fizycznych oraz liczbowych świadczą o podobnym charakterze reprezentacji umysłowych tych kategorii.

Liczba a przestrzeń

Na to, że liczby są reprezentowane w odniesieniu do przestrzeni, wskazał już w XIX wieku Francis Galton [1880]. Prosił on osoby badane o opisanie, w jaki sposób wyobrażają sobie liczby. Większość osób wskazała, że przedstawia sobie liczby jako punkty umieszczone na linii. Dalsze charakterystyki hipotetycznej Mentalnej Osi Liczbowej (*Mental Number Line* – MNL) podaje Frank Restle [1970]. Jego zdaniem MNL, na której jako znaczniki znajdują się reprezentacje liczb, ma charakter analogowy, choć nie jest nieskończenie podzielna. Zgodnie z modelem opisanym przez tego badacza, w celu porównania dwóch liczb należy podzielić MNL na tyle obszarów, by porównywane liczby znalazły się w dwóch różnych obszarach. Stąd wynikać może efekt dystansu numerycznego. Co więcej, kierunek MNL jest zależny od kierunku pisania (od lewej do prawej bądź od prawej do lewej). Dowodem na to jest efekt SNARC (*Spatial-Numerical Association of Response Codes*) [Dehaene, Bossini i Giraux 1993]. Polskie tłumaczenie nazwy tego zjawiska jako „zależność przestrzenna między liczbą a rodzajem odpowiedzi" proponuje Robert Mackiewicz [2012]. Polega ono na tym, że w kulturach, w których zapis odbywa się od lewej do prawej strony, osoby proszone o ocenę np. parzystości prezentowanych cyfr reagują szybciej na liczby o niskiej wartości liczbowej po lewej stronie swojego ciała, podczas gdy na liczby o dużej wartości reagują szybciej po prawej stronie. Odwrotny efekt można zaobserwować w kulturach, w których zapis odbywa się od prawej do lewej strony [Shaki, Fischer i Petrusic 2009]. Bez względu na to, w jaki sposób wyjaśniany jest efekt SNARC (inna interpretacja np. Gevers i in. [2010]), stanowi on dowód na to, że liczby są reprezentowane w odniesieniu do przestrzeni.

Wynikać to może stąd, że umysł nie jest ewolucyjnie dostosowany do przetwarzania pojęć abstrakcyjnych i nie ma struktur wyspecjalizowanych do przetwarzania tego rodzaju informacji. Dostosowuje zatem struktury już posiadane i za ich pomocą reprezentuje pojęcia abstrakcyjne, takie jak liczba czy inne rodzaje wielkości [por. Dehaene 2011].

Reprezentacja liczby jako część ogólnej reprezentacji wielkości

Informacja o liczbie czy szerzej pojmowanej liczebności nie stanowi nieodłącznej charakterystyki reprezentacji obiektu i przynajmniej w pewnym zakresie jest przez umysł przetwarzana oddzielnie. Cechy tak abstrakcyjne jak czas trwania zdarzeń, fizyczny rozmiar obiektów, wysokość dźwięku czy nasilenie emocji również mogą być reprezentowane i przetwarzane w umyśle w oderwaniu od obiektu [Vallesi, Binns i Shallice 2008; Ren, Nicholls, Ma i Chen 2011; Rusconi, Kwan, Giordano, Umiltà i Butterworth 2006; Holmes i Lourenco 2011]. Do przetwarzania informacji związanych z wielkością wykorzystywane są struktury odpowiedzialne za przetwarzanie informacji przestrzennych, zwłaszcza obwody nerwowe w horyzontalnej części bruzdy śródciemieniowej (*Horizontal Intraparietal Sulcus* – HIPS) [Hubbard, Piazza, Pinel i Dehaene 2005; Cohen Kadosh, Lammertyn i Izard 2008]. Jak wykazali Andreas Nieder, David J. Freedman i Earl K. Miller [2002], w obszarze tym u naczelnych znajdują się neurony, które reagują selektywnie na daną liczebność bez względu na inne charakterystyki bodźców.

Reprezentacje liczb i wielkości wydają się przynajmniej częściowo niezależne od reprezentowanego obiektu. Co więcej, reprezentacje liczb są bardzo podobne do reprezentacji innych wielkości ciągłych i niezależne od ich modalności zmysłowej. Abstrakcyjne wielkości (czas trwania zdarzeń, kolejność w określonej sekwencji, nasilenie emocji, rozmiar obiektu, wysokość dźwięku i wiele innych) są reprezentowane w odniesieniu do bardzo konkretnego świata, a mianowicie fizycznej przestrzeni wokół ciała.

Vincent Walsh [2003] w swojej teorii wielkości ATOM (*A Theory of Magnitude*) formułuje teoretyczną propozycję istnienia jednolitego systemu przetwarzania informacji o wielkości. Postuluje, że obszary dolnej kory ciemieniowej odpowiadają za przetwarzanie abstrakcyjnej informacji na temat wielkości/ilości bez względu na to, czego wielkość dotyczy. Teoria ta jest bardzo ogólna i nadal nie do końca sprawdzone zostały predykcje z niej wynikające.

Podstawowe zdolności operowania na liczebnościach

Jedną z podstawowych zdolności operowania na liczebnościach jest subityzowanie (od łacińskiego *subitius* – ‘nagły’). Jest to zdolność do automatycznego, bezwysiłkowego, szybkiego i bezbłędnego określania niewielkich liczebności (maksymalnie 3 lub 4 obiekty). Zdolność subityzowania posiadają już niemowlęta, które są w stanie reagować na zmianę wielkości prezentowanych im zbiorów obiektów [Starkey i Cooper 1980]. Zdolności operowania na niewielkich liczebnościach posiada wiele gatunków zwierząt: naczelne, ale także szczury czy niektóre gatunki ptaków [Dehaene 2011].

Jest to sprzeczne z klasycznym przekonaniem obecnym już w pismach Euklidesa czy Pitagorasa, że posługiwanie się liczbami, podobnie jak językiem, to domena wyłącznie ludzkiej aktywności, a człowiek jest jedyną istotą, która potrafi liczyć [Dehaene 2011].

Wraz ze wzrostem liczebności sprawność subityzowania zanika. W jego miejsce zaczyna działać bardziej zawodny system przybliżonych liczebności (*approximate* [Dehaene 2011]). System ten jest zdecydowanie mniej dokładny. By policzyć bardziej liczne obiekty, musimy przetwarzać je szeregowo (objąć uwagą każdy z nich po kolei).

Naturalna predyspozycja a wiedza matematyczna

Wiedza z zakresu matematyki na poziomie akademickim różni się od omówionych w poprzedniej części podstawowych zdolności operowania liczebnościami. Według Dehaene'a [2001] wchodzą one w skład tak zwanego zmysłu numerycznego (*number sense*) [por. Berch 2005], który jest częścią genetycznego dziedzictwa wspólnego ludziom i wielu gatunkom zwierząt. Niemniej jednak istnieje związek między sprawnością posługiwania się przybliżonymi liczebnościami (szacowania) a poziomem osiągnięć w zakresie matematyki [Siegler 2009].

Zarówno według Dehaene'a [2011], jak i Butterwortha [1999] rozwój matematyki jest zdeterminowany przez naturalną predyspozycję umysłu do posługiwania się liczebnościami. Butterworth zaznacza, że rozwój matematyki przebiegał równolegle oraz względnie niezależnie od siebie w różnych częściach świata i nie jest efektem jednego unikatowego odkrycia, rozpowszechnionego następnie w innych kulturach. Dehaene z kolei podkreśla, że w świetle wyników badań psychologicznych konstruktywistyczne rozumienie matematyki wydaje się najbardziej prawdopodobne. Zgodnie z nim matematyka istnieje tylko w umyśle podmiotu, który ją tworzy. Inne gatunki, a nawet inne kultury mogłyby tworzyć własne matematyki zależne od aktualnych potrzeb. Obiekty matematyczne są kategoriami *a priori* ludzkiej myśli, a matematyk jedynie je udoskonala i formalizuje.

Należy zaznaczyć, że przedstawione wyżej koncepcje to tylko jedno z możliwych ujęć natury matematyki. Odmienny pogląd w kwestii istnienia liczb i natury zdolności operowania nimi przyjmuje Noam Chomsky [por. Christomalis 2009]. Uważa on, że posługiwanie się liczbą różni się jakościowo od zdolności operowania na liczebnościach przez zwierzęta. Matematykę ujmuje natomiast jako produkt uboczny języka. Matematyka, podobnie jak język, to system, który pozwala na generowanie nieskończonej liczby obiektów na podstawie skończonej liczby obiektów bardziej podstawowych.

Podsumowanie

W niniejszym artykule pokazano różnice i podobieństwa między tradycyjnymi filozoficznymi koncepcjami liczby a tym, w jaki sposób jest zorganizowana jej umysłowa reprezentacja. Wyniki badań w zakresie psychologii poznawczej, neuropsychologii (analiza deficytów u pacjentów z uszkodzeniem określonych obszarów mózgu) czy neurobiologii wskazują, że zdolność operowania liczbą jest częścią wrodzonych predyspozycji i umiejętności i nie cechuje wyłącznie wykształconego umysłu dorosłego człowieka. Pomimo stale rosnącej liczby badań w zakresie psychologii poznania matematycznego (*number cognition*) nadal brakuje ogólnych modeli integrujących dotychczasowe wyniki. Jedną z propozycji stanowi przedstawiona wyżej teoria ATOM Walsha [2003]. Jest ona jednak bardzo ogólna, a wiele hipotez, które można na jej podstawie wyprowadzić, nie zostało jeszcze sprawdzonych. Podobne aspiracje ma również najnowsza propozycja Martina Fischera [2012], która kwestię powiązania liczb z przestrzenią ujmuje w kontekście poznania ucieleśnionego (*embodied cognition*). Ujęcie to podkreśla wpływ procesów percepcyjnych i motorycznych na mentalne reprezentacje liczb, a zwłaszcza ich przestrzenny komponent. Ta ciekawa propozycja teoretyczna ma potencjał wyjaśnienia wyników licznych badań nad mentalnymi reprezentacjami liczb. Wyjaśnia również genezę oraz stabilność i podatność na manipulację eksperymentalną różnorodnych związków liczb z przestrzenią. Obecnie trudno o jednoznaczną ocenę tej koncepcji ze względu na niewielką liczbę badań, które weryfikowałyby predykcje wynikające z tej teorii.

Kwestie podjęte w niniejszej pracy mają również znaczenie dla kształcenia w zakresie matematyki. Tradycyjny model nauczania tego przedmiotu zakłada, że kompetencja matematyczna jest nabywana od podstaw jako pewien zbiór abstrakcyjnych faktów, które dziecko musi przyswoić [por. Butterworth 1999]. Co więcej, zwłaszcza w przypadku nauki dodawania i odejmowania liczb jednocyfrowych czy tabliczki mnożenia podkreślane jest znaczenie pamiętania materiału. Gdy uczeń nie pamięta wyniku, próby jego znalezienia nie wprost (np. poprzez rozbicie 7 + 8 na 7 + 7 + 1) często spotykają się z dezaprobatą nauczyciela.

Biorąc pod uwagę przytoczone wyżej teorie i wyniki badań, lepszą strategią w nauczaniu matematyki wydaje się wykorzystanie naturalnych predyspozycji do operowania na liczebnościach. Zdolność do szybkiego i względnie dokładnego szacowania nie może zastąpić umiejętności wykonywania dokładnych obliczeń, niemniej jednak nie oznacza to, że powinna być zupełnie pomijana. Jak twierdzi Dehaene [2001], właśnie na naturalnej zdolności do operowania na przybliżonych liczebnościach w toku formalnej edukacji nadbudowywane są bardziej złożone umiejętności. Zdolność szacowania jest przejawem rozumienia liczebności i natury operacji na nich wykonywanych. Pozwala ona na szybkie wykrycie błędu popełnianego w trakcie wykonywania dokładnych obliczeń. Pozwala również zapobiec najbardziej dotkliwym w życiu codziennym błędom w liczeniu, czyli takim, które mogą spowodować największą stratę, np. w trakcie wykonywania zakupów. Wyniki badań w zakresie neurobiologii sugerują, że zwłaszcza w początkowych okresach kształcenia bardzo duże znaczenie dla rozwoju kompetencji matematycznych ma również liczenie na palcach [Dehaene 2011; Ansari 2008].

Poza implikacjami w zakresie dydaktyki matematyki, psychologiczne aspekty operowania liczbami mają bardzo duże znaczenie dla ekonomii i kwestie te są podejmowane przez psychologię ekonomiczną i marketingu. To od tego, w jaki sposób myślimy o liczbach, w jaki sposób je klasyfikujemy (choćby dychotomicznie jako duże i małe), w znacznej mierze zależą podejmowane przez nas decyzje zakupowe. Szczegółowo te zagadnienia zostały omówione w pracy Mackiewicza [2012].

W kontekście zagadnień przedstawionych w niniejszej pracy wydaje się zasadne uzupełnienie tradycyjnego spojrzenia na matematykę jako w pełni obiektywną dziedzinę wiedzy, domenę wykształconego umysłu ludzkiego, o aspekty psychologiczne i neurobiologiczne. Są one wynikiem interakcji wrodzonych zdolności wspólnych człowiekowi i wielu zwierzętom, czynników kulturowych, takich jak kierunek pisania czy zasób słownictwa, za pomocą którego opisujemy liczebności [Dehaene, Izard, Spelke i Pica 2008], oraz formalnej edukacji matematycznej. Czynników tych nie należy ignorować, zwłaszcza gdy bierze się pod uwagę nasz codzienny kontakt z liczbami.

BIBLIOGRAFIA

Ansari D. (2008). *Effects of Development and Enculturation on Number Representation in the Brain*. „Nature Reviews Neuroscience" 9, s. 278–291.

Anscombe G.E.M., Geach P.T. (1973). *Three Philosophers*. Oxford: Basil Blackwell Oxford.

Bondecka-Krzykowska I. (2003). *Strukturalizm w filozofii matematyki*. „Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego" XXXIX, s. 167–182.

Berch D.B. (2005). *Making Sense of Number Sense Implications for Children with Mathematical Disabilities*. „Journal of Learning Disabilities" 38(4), s. 333–339.

Butterworth B. (1999). *The Mathematical Brain*. London: Macmillan.

Christomalis S. (2009). *The Cognitive and Cultural Foundations of Numbers*. W: E. Robson, J. Stedall (red.), *The Oxford Handbook of the History of Mathematics* (s. 495–517). New York: Oxford University Press.

Cohen Kadosh R., Lammertyn J., Izard V. (2008). *Are Numbers Special? An Overview of Chronometric, Neuroimaging, Developmental and Comparative Studies of Magnitude Representation*. „Progress in Neurobiology" 84(2), s. 132–147.

Cullen C. (2009). *People and Numbers in Early Imperial China*. W: E. Robson, J. Stedall (red.), *The Oxford Handbook of the History of Mathematics* (s. 591–618). New York: Oxford University Press.

Dehaene S. (2001). *Précis of the Number Sense*. „Mind & Language" 16, s. 16–36.

Dehaene S. (2011). *The Number Sense. How the Mind Creates Mathematics? Revised and Updated Edition*. New York: Oxford University Press.

Dehaene S., Bossini S., Giraux P. (1993). *The Mental Representation of Parity and Number Magnitude*. „Journal of Experimental Psychology: General" 122, s. 371–396.

Dehaene S., Izard V., Spelke E., Pica P. (2008). *Log or Linear? Distinct Intuitions of the Number Scale in Western and Amazonian Indigene Cultures*. „Science" 320, s. 1217–1220.

Fias W., Lammertyn J., Reynvoet B., Dupont P., Orban G.A. (2003). *Parietal Representation of Symbolic and Nonsymbolic Magnitude*. „Journal of Cognitive Neuroscience" 15, s. 1–11.

Fischer M. (2012). *A Hierarchical View of Grounded, Embodied, and Situated Numerical Cognition*. „Cognitive Processing" 13, Supplement 1, s. S161–S164.

Friend M. (2007). *Introducing Philosophy of Mathematics*. Stocksville: Acumen.

Galton F. (1880). *Visualised Numerals*. „Nature" 21, s. 252–256.

Gevers W., Santens S., Dhooge E., Chen Q., Van den Bossche L., Fias W., Verguts T. (2010). *Verbal-Spatial and Visuospatial Coding of Number-Space Interactions*. „Journal of Experimental Psychology. General" 139(1), s. 180–190.

Holmes K.J., Lourenco S.F. (2011). *Common Spatial Organization of Number and Emotional Expression: A Mental Magnitude Line*. „Brain and Cognition" 77(2), s. 315–323.

Horsten L. (2012). *Philosophy of Mathematics*. W: E.N. Zalta (red.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Summer 2012 Edition), http://plato.stanford.edu/archives/sum2012/entries/philosophy-mathematics/.

Hubbard E.M., Piazza M., Pinel P., Dehaene S. (2005). *Interactions between Number and Space in Parietal Cortex*. „Nature Reviews Neuroscience” 6, s. 435–448.
Johnson D.M. (1939). *Confidence and Speed in the Two-Category Judgment*. „Archives of Psychology” 241, s. 1–52.
Kvasz L. (1998). *History of Geometry and the Development of the Form of its Language*. „Synthese” 116(2), s. 141–186.
Kvasz L. (2000). *Changes of Language in the Development of Mathematics*. „Philosophia Mathematica” 8(3), s. 47–83.
Kvasz L. (2006). *The History of Algebra and the Development of the Form of its Language*. „Philosophia Mathematica” 14(3), s. 287–317.
Lloyd G. (2009). *What Was Mathematics in the Ancient World? Greek and Chinese Perspectives*. W: E. Robson, J. Stedall (red.), *The Oxford Handbook of the History of Mathematics* (s. 7–25). New York: Oxford University Press.
Mackiewicz R. (2012). *Liczby w decyzjach ekonomicznych: instynkt numeryczny i wrażliwość cenowa*. W: A. Falkowski, T. Zaleśkiewicz (red.), *Psychologia poznawcza w praktyce. Ekonomia, Biznes. Polityka* (s. 137–185). Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN.
Moyer R.S., Landauer T.K. (1967). *Time Required for Judgments of Numerical Inequality*. „Nature” 215, s. 1519–1520.
Nęcka E., Orzechowski J., Szymura B. (2006). *Psychologia poznawcza*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN.
Nieder A., Freedman D.J., Miller E.K. (2002). *Representation of the Quantity of Visual Items in the Primate Prefrontal Cortex*. „Science” 297, s. 1708–1711.
Pinel P., Piazza M., Le Bihan D., Dehaene S. (2004). *Distributed and Overlapping Cerebral Representations of Number, Size, and Luminance during Comparative Judgments*. „Neuron” 41, s. 1–20.
Priest G. (1998). *Numbers*. W: E. Craig (red.), *Routledge Encyclopedia of Philosophy* (vol. 7, s. 47–54). London and New York: Routledge.
Ren P., Nicholls M.E.R., Ma Yuan-ye, Chen L. (2011). *Size Matters: Non-Numerical Magnitude Affects the Spatial Coding of Response*. „Plos One” 6(8), s. e23553.
Restle F. (1970). *Speed of Adding and Comparing Numbers*. „Journal of Experimental Psychology” 83, s. 274–278.
Rusconi E., Kwan B., Giordano B.L., Umiltà C., Butterworth B. (2006). *Spatial Representation of Pitch Height: the SMARC Effect*. „Cognition” 99(2), s. 113–129.
Shaki S., Fischer M.H., Petrusic W.M. (2009). *Reading Habits for Both Words and Numbers Contribute to the SNARC Effect*. „Psychonomic Bulletin and Review” 16(2), s. 328–331.
Siegler R.S. (2009). *Improving the Numerical Understanding of Children from Low-Income Families*. „Child Development Perspectives” 3, s. 118–124.
Starkey P., Cooper R.G. (1980). *Perception of Numbers by Human Infants*. „Science” 210, s. 1033–1035.
Thakkar M. (2009). *Mathematics in Fourteenth-Century Theology*. W: E. Robson, J. Stedall (red.), *The Oxford Handbook of the History of Mathematics* (s. 619–638). New York: Oxford University Press.
Vallesi A., Binns M.A., Shallice T. (2008). *An Effect of Spatial-Temporal Association of Response Codes: Understanding the Cognitive Representations of Time*. „Cognition” 107(2), s. 501–527.
Walsh V. (2003). *A Theory of Magnitude: Common Cortical Metrics of Time, Space and Quantity*. „Trends in Cognitive Sciences” 7, s. 483–488.
Widomski J. (1996). *Ontologia liczby. Wybrane zagadnienia z ontologii liczby w starożytności i średniowieczu*. Kraków: Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego.